

جدارة عند لاقى القوى

إذا كان $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ متسلسلات قياسية

فمجموع الآلاف هو $f(z)$ ومجموع النتائج هو $g(z)$

عندئذ فإن جدار عند لاقى القوى يكون متسلسلة قياسية

و دائرة التقارب R هي في دائرة تقارب R_1 و R_2 باقيد

مجموع الآلاف = دليل جدار

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n$$

بشكل عام جدار

$$C_n = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$$

كذلك مع المعاملات = مجموع الجدار في الشكل:

المتسلسلة القوية

إذا كان $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ متسلسلة قياسية ومجموعها هو $f(z)$ على دائرة تقارب

التقارب C

وإذا كانت $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ متسلسلة قياسية ومجموعها هو $g(z)$ على دائرة تقارب

C_2 عندئذ يكون

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$$

ومتسلسلة دالتين تحليلية هو دالة دالة تحليلية بشرط \neq المع

مع تقيد المعاملات = من العلاقة $C_n = \frac{h^{(n)}(0)}{n!}$ و $h(z)$ هي دالة تحليلية

كما أن التقارب هو في دائرة تقارب

Subject: _____

/ /

يمكن تعيين C_n في حال التـ $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

وهذه العلاقة تتبع أن $a_0 = b_0 c_0 \Rightarrow \begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & b_0 \end{pmatrix}$

$a_1 = b_1 c_0 + b_0 c_1$

وهذه لنا، العلاقة يتم تعيين C_1

$a_2 = b_2 c_0 + b_1 c_1 + b_0 c_2$

وهذه لنا، العلاقة يتم تعيين C_2

$a_3 = b_3 c_0 + b_2 c_1 + b_1 c_2 + b_0 c_3$

وهذه لنا، العلاقة يتم قسمة C_3

$|z| < 1$ $f(z) = \frac{e^z}{1-z}$ نظام أحدهم مشهور العلاقة

نصف قطر تقارب المتسلسلة

الآن لنوجد الشرطية جداراً لمتسلسلة

طريقة الحد: يمكن إيجاد الشرطية جداراً لمتسلسلة

$f(z) = e^z \frac{1}{1-z}$

$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{6}, a_4 = \frac{1}{24}$ $b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1, b_4 = 1$

$f(z) = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{4!} z^4 + \dots (1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + \dots)$

$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$

$c_0 = a_0 b_0 = 1 \cdot 1 = 1$

$c_1 = a_0 b_1 + a_1 b_0 = 1 + 1 = 2$

$c_2 = a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$

Subject: / /

$$c_3 = a_0 b_3 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + a_3 b_0 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 \\ = \frac{16}{6}$$

$$c_0 + c_1 + c_2 + c_3 + \dots \\ f(z) = 1 + z + \frac{5}{2}z^2 + \frac{16}{6}z^3 + \dots \quad \text{إذن:}$$

الآن نكتب الدالة:

$$f(z) = \frac{e^z}{1-z} = \frac{1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{4!}z^4+\dots}{1-z}$$

لأننا نريد a_0, a_1, a_2, \dots ، b_0, b_1, \dots

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}$$

$$b_0 = 1, b_1 = 1, b_2 = 0, b_3 = 0$$

$$a_0 = b_0 c_0 = 1 = 1 \cdot c_0 \Rightarrow \boxed{c_0 = 1} \quad \text{حالات خاصة}$$

$$a_1 = b_0 c_1 + b_1 c_0 \Rightarrow 1 = 1 \cdot c_1 + 1 \Rightarrow \boxed{c_1 = 2}$$

$$a_2 = b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \Rightarrow \boxed{c_2 = \frac{5}{2}}$$

$$a_3 = b_0 c_3 + b_1 c_2 + b_2 c_1 + b_3 c_0 \Rightarrow \boxed{c_3 = \frac{16}{6}}$$

أضرب الدالة في $1-z$:

نصل إلى النتيجة:

Subject: _____

/ /

لتفرض ان z_0 هو للمالة f حيث $f(z_0) = 0$ وإذا كان

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \dots = f^{(m)}(z_0) = 0$$

عندئذ تكون النقام z_0 هو من الدرجة m للمالة f في هذه الحالة يكون

$$f(z) = \frac{f(z)}{m!} (z-z_0)^m + \frac{f'(z)}{(m+1)!} (z-z_0)^{m+1} + \dots + \frac{f^{(n)}(z)}{n!} (z-z_0)^n + \dots$$

$$f(z) = (z-z_0)^m \left[a_m + a_{m+1} (z-z_0) + a_{m+2} (z-z_0)^2 + \dots \right]$$

$$f(z) = (z-z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z-z_0)^n$$

$$f(z) = (z-z_0)^m g(z) \quad *$$

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z-z_0)^n$$

$$a_m = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}$$

حيث

أثبتنا ان g دالة تحليلية في جميع مستلزمات هذه الدالة تحليلية أي ان

$g(z)$ دالة تحليلية في دائرة القباب وبها أن $g(z) \sim$ دالة قابلة

للإشتقاق وبها أن g قابلة للإشتقاق من دالة متصلة ومفردة وبها أن g مفردة

هذا يعني من أجل $\epsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ حيث ان

$$|g(z) - g(z_0)| < \epsilon \quad \text{طالما أن} \quad |z - z_0| < \delta$$

لتفرض أن $\epsilon = \frac{1}{2} |g(z_0)|$ ونفرض أن $g(z_0) \neq 0$ والعدد δ

FUTURE

Subject: _____

حيث أن $\frac{|g(z)|}{2} < |g(z) - g(z_0)|$ $\forall z \in D, |z - z_0| < \delta$

إن الدالة $g(z)$ لا يمكن أن تنقسم عند أي نقطة من نقاط جوار z_0 لإحداث ذلك لنفرض أن $g(z)$ تنقسم عند نقطة من نقاط جوار z_0 يصبح لدينا قيود $\frac{|g(z)|}{2} < |g(z) - g(z_0)|$ أو $\frac{|g(z)|}{2} < |g(z) - g(z_0)|$

وهذا غير ممكن أي أنه صعب التحيز $\{ \}$

من العلاقة * وبما أن لا تنقسم كما بينا قبل قليل عند أي نقطة من نقاط جوار z_0 نستنتج أن الدالة P لا تنقسم إلا عند نقطة z_0 أما عن بقية جوار z_0 لا تنقسم. بهذا الشكل نكون قد أثبتنا صحة المبرهنة.

مبرهنة: آهنا - الدالة تحليلية في نقاط مفردة

دراسة $P(z)$ في نقطة المفردة

المثال: $P(z) = e^z - 1 - z$

$P(0) = e^0 - 1 - 0 = 1 - 1 - 0 = 0$

$P'(z) = e^z - 1 \Rightarrow P'(0) = 1 - 1 = 0$

$P''(z) = e^z \Rightarrow P''(0) = 1 \neq 0$ ومنه $P(z)$ من الرتبة الثانية

ملاحظة: إذا كان z_0 موقع منفرج للدالة P من درجة k عند z_0 يكون شكل الدالة P هو

$g(z) \neq 0, (z - z_0)^k g(z) = P(z)$

الفصل الثالث النظام المستأدة وتصنيفها

لنكن f دالة متغير عقدي، اذ كانت f دالة غير قابلة للإشتقاق عند z_0 وقابلة عند بعض نقاط حوارها للنقطة z_0 عندئذ نعر هذه النقطة z_0 نقطة حادة لهذه الدالة وتصنف لهذه الدالة أو النظام إلى صنفين:

الأنواع الأولى: نظام مستأدة معزولة، نقول في النقطة z_0 إذا كانت معزولة إذا كانت الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند z_0 وقابلة للإشتقاق عند جميع نقاط حوارها لهذه النقطة.

مثال: إذا كانت $f(z) = \frac{1}{z}$ تلك نقطة حادة وحيدة عند $z=0$ لأن الدالة f غير معزولة في تلك النقطة غير معزولة وبالمثل في نقطة $z=0$ وبالمثل في نقطة $z=0$ أما عن باقي النقاط المستأدة فهي قابلة للإشتقاق لذلك $z=0$ هي نقطة حادة معزولة.

دعنا الآن ندرس هذه الدالة صريحة عند جميع نقاط الحوار $z \neq 0$ ، $z \neq 3i$ أو $z=3i$ حيث ندرسها في نقطة حادة غير معزولة. وكما نرى هذه نقطة حادة معزولة لأننا نرى حوارها تكون الدالة f قابلة عند كل نقطة من نظام هذا الحوار المستأدة (أو $3i$)

النوع الثاني: نظام مستأدة غير معزولة:

نقول في النقطة أن نقطة غير معزولة للدالة f إذا كان حوارها للنقطة z_0 يحتوي على نظام حادة للدالة f .

Subject: _____

/ /

مثال لنكن لدينا الدالة: $f(z) = \text{Log } z$

نعلم بأن النقاط الخاصة لهذه الدالة $y=0, x < 0$ هي التي يحدد
النفقة $z=0$ هي نقطة خاصة غير معزولة لأن أي جوار (منه النقطة) سوف
يحتوي على نقاط خاصة أخرى.

مثال لنكن لدينا الدالة $f(z) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{z}}$

النقاط الخاصة هنا تنقسم إلى قسمين، $z=0$ هي نقطة معزولة $\sin \frac{\pi}{z} = 0$

$$\frac{\pi}{z} = n\pi \Rightarrow z = \frac{1}{n}$$

عند $n=1$ $z=1$ ، كما يمكننا إيجاد جميع نقاط معزولة باستثناء $z=0$

$z=-1$ $n=-1$ ~~نلاحظ~~ وبما أن هذه الدالة

$z=2$ $n=2$ $z=\frac{1}{2}$ ، يمكننا إيجاد $z=0$ عندما $n \rightarrow \infty$

$z=-2$ $n=-2$ $z=-\frac{1}{2}$ ، فإننا نلاحظ أن

أي جوار لنقطة $z=0$ سوف يحتوي على نقاط خاصة أخرى.

والنقاط الخاصة الغير المعزولة (لا نضع برا)

أما $z=0$ فالمعزولة فتقسم إلى ثلاثة أنواع .

① النوع الأول: نقاط خاصة قابلة للإزالة.

تعريف: نقول عن النقطة $z=0$ الخاصة بالمعزولة أنها نقطة قابلة للإزالة

((قابلة للإزالة)) إذا وجدت A كانت $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = A$

$z \rightarrow 0$

Subject: _____

/ /

هذه ن تتبع أن f دالة محدودة في مدار النقطة الزائدة القابلة للإصلاح.

مثال: عند النقطة الزائدة للمالة $f(z) = \frac{z^2 - 1 - z}{z^2}$ ثم سنقر.

الكل: النقاط الزائدة التي تقسم المقام f عند $z=0$ ($z^2=0$)

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 - 1 - z}{z^2} = \frac{0}{0}$$

نستخدم أريستال:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 - 1}{2z} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{1} = \frac{1}{2}$$

أي أن $z=0$ نقطة قابلة للإصلاح أو للإزالة.
درجة البعد = درجة المقام من قابلية للإصلاح.

النوع الثاني: الأقطاب: شوم تكون z_0 ستادة محزلة.

نقول في هذه الحالة أن الأقطاب للمالة f إذا وضعت إذا كان نهاية

f عند z_0 $\rightarrow \infty$ ساري (مما لا يحيد بحدود) ويكون هذا القطب نهاية

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z) = B \neq 0$$

$$z \rightarrow z_0 \quad 0 \neq B \neq 0$$

مثال: سنرى المالة $f(z) = \frac{z^2 - 1 - z}{z^3}$

Subject:

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 - 1 - z}{z^3} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 - 1}{3z^2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{6z} = \frac{1}{0} = \infty$$

وهو قطب من الدرجة 1

حريته من الرتبة الأولى من قطب بسيط

والقطب من رتبة الثانية نذكره قطب ثنائي

$$f(z) = \frac{\sin z}{z^3}$$

نلاحظ ان $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ هي القطب البعيدة الوحيدة

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \frac{0}{0} \quad 2) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\cos z}{3z^2} = \frac{1}{0} = \infty$$

اذن $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ هي رتبة الثانية

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 \sin z}{z^3} = \frac{\sin z}{z} = 1$$

القطب البسيط

اذ ان $\lim_{z \rightarrow 0} f(z)$ هي رتبة الثانية

قطب ثنائي